CÁLCULO II

Grado M+I

Sucesiones y series de funciones

Sucesión de funciones

Definición

Una **sucesión de funciones** será cualquier sucesión de la forma $\{f_n\}$ donde, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función real (todas las funciones de la sucesión tienen el mismo dominio $D \subset \mathbb{R}$).

Ejemplos

i) $f_n(x) = \dfrac{nx^3}{1+nx}$, $x \in [0,1]$.

ii) $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

iii) $f_n(x) = ne^{-nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

iv) $f_n(x) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)^n$, $x \in [-1,2]$.

v) $f_n(x) = 2nxe^{-nx^2}$, $x \in [0,1]$.

vi) $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{x^{2n}+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Límite puntual

Observación. Para cada $x \in D$ tenemos definida una sucesión $\{f_n(x)\}$ de números reales, que puede o no ser convergente según el punto $x \in D$ escogido.

Ejemplos

Dados los valores $x = 0, \frac{1}{2}, 1, -1, 2$, considera para cada caso del ejemplo anterior aquellos valores de x que tengan sentido. Escribe las sucesiones correspondientes. ¿Cuáles de esas sucesiones tienen límite? ¿cuánto vale?

i) $f_n(x) = \dfrac{nx^3}{1+nx}, \quad x \in [0,1].$

ii) $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$

iii) $f_n(x) = ne^{-nx^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$

iv) $f_n(x) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)^n, \quad x \in [-1,2].$

v) $f_n(x) = 2nxe^{-nx^2}, \quad x \in [0,1].$

vi) $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{x^{2n}+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Límite puntual

Definición

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones en $D \subset \mathbb{R}$, llamaremos **campo de convergencia** de esta sucesión al conjunto

$$A = \{x \in D : \ | : \ f_n(x) \text{ es convergente}\} \subset D.$$

Definición

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definida en $D \subset \mathbb{R}$ y sea A su campo de convergencia. Llamaremos **límite puntual** de la sucesión $\{f_n\}$ en A a la aplicación $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ para todo } x \in A.$$

Ejercicio

Escribe la definición anterior con ε y n_0.

Límite puntual

Ejercicios

1 Calcula el campo de convergencia y el límite puntual de las funciones

i) $f_n(x) = \dfrac{nx^3}{1+nx}, \quad x \in [0,1].$

ii) $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$

iii) $f_n(x) = ne^{-nx^2}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$

iv) $f_n(x) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)^n, \quad x \in [-1,2].$

v) $f_n(x) = 2nxe^{-nx^2}, \quad x \in [0,1].$

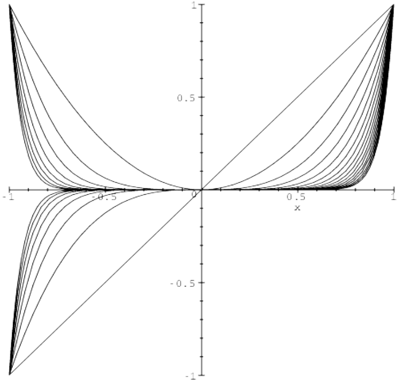
vi) $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{x^{2n}+1}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$

2 Plantea una sucesión de funciones, estudia su campo de convergencia y el límite puntual.

Convergencia puntual, continuidad y derivabilidad

La convergencia puntual no conserva la continuidad ni la derivabilidad.

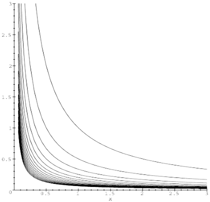
Ejemplo. Sea la sucesión de funciones $\{f_n(x)\} = \{x^n\}$. Todas las f_n son continuas y derivables, sin embargo, el límite puntual no es una función continua y por tanto, tampoco derivable.

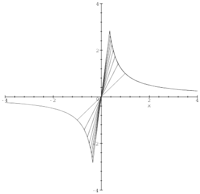


Convergencia puntual y acotación I

La convergencia puntual no conserva la acotación

1. Puede existir límite puntual y estar acotado aunque las funciones de la sucesión no estén acotadas. Ver la sucesión definida en $(0,1)$, dada por $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$.
2. Pueden ser acotadas todas las funciones de la sucesión y no ser acoatada la función límite.





Ejercicio

Encuentra una expresión analítica de una sucesión de funciones que se corresponda con la segunda gráfica.

Convergencia puntual y acotación II

Definición

Se dice que una sucesión $\{f_n\}$ con $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$, está **uniformemente acotada** (o que tiene una cota común) si existe $M \in \mathbb{R}_+$ de modo que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in D$.

Teorema

Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones uniformemente acotada, convergente puntualmente a f, entonces f está acotada.

Ejercicio

Demuestra el teorema anterior.

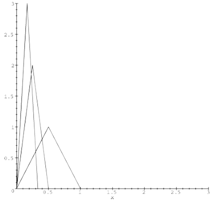
Convergencia puntual e integración

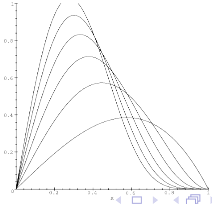
El límite puntual de funciones integrables en $[a,b]$ no tiene porqué ser integrable, y aún siéndolo no tiene porqué cumplirse que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Ejemplos. Consideremos las siguientes sucesiones de funciones, la primera se define goemétricamente y la segunda viene dada por $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$, para todo $x \in [0,1]$. En ambos casos se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \frac{1}{2} \neq \int_0^1 (\lim_{n\to\infty} f_n(x))\, dx = \int_0^1 0\, dx = 0.$$





Convergencia puntual e integración II

Observación.
Los ejemplos anteriores muestran sucesiones que no son uniformemente acotadas. El siguiente teorema muestra cuándo se puede permutar el límite y la integral, para sucesiones uniformemente acotadas.

Teorema (Arzelà)

Sea $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones en el intervalo $[a, b]$ que converge puntualmente a función f. Supongamos que se que verifica:

1. *Es uniformemente acotada,*
2. *Cada término de la sucesión es una función integrable Riemann en $[a, b]$,*
3. *f es integrable Riemann en $[a, b]$.*

Entonces, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx.$$

Convergencia uniforme

Consideraremos que $A = D \neq \emptyset$. En caso contrario restringiremos D a su campo de convergencia.

Definición

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definida en D y sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremos que $\{f_n\}$ **converge uniformemente** a f en D, si y solo si, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0(\varepsilon)$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

para todo $n \geq n_0(\varepsilon)$ y para todo $x \in D$.

Ejercicios.

1. Demuestra que si $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en D, entonces $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en D.
2. Encuentra un ejemplo que muestre que el recíproco no es cierto.

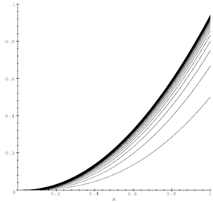
Criterio del supremo

Proposición (Criterio del supremo)

Sea $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $n \in \mathbb{N}$*, y sea* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$*. Sea* $M_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in D\}$*. Entonces,*

$$\{f_n\} \text{ converge uniformemente a } f \text{ en } D \iff \lim_{n\to\infty} M_n = 0.$$

Ejemplo. Sea $f_n(x) = \dfrac{nx^3}{1+nx}$, con $x \in [0,1]$, y $f(x) = x^2$. Como $M_n = \sup\{|\dfrac{nx^3}{1+nx} - x^2| : x \in [0,1]\} = \dfrac{1}{1+n}$, se tiene que f_n converge uniformemente.



Teorema (Convergencia uniforme y acotación)

Sea $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones acotadas en* D *tales que* $\{f_n\}$ *converge uniformemente a* f *en* D*. Entonces* f *está acotada en* D *y la sucesión* $\{f_n\}$ *está uniformemente acotada en* D*.*

Teorema (Convergencia uniforme y continuidad)

Sea $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones definida en* $D \subset \mathbb{R}$ *tal que* $f_n(x)$ *es continua en* D*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, y tal que* $\{f_n\}$ *converge uniformemente a* f *en* D*. Entonces* f *es continua en* D*.*

Ejercicio. El recíproco no es cierto. Encuentra un ejemplo de una sucesión de funciones continuas que converjan a una función continua pero no uniformemente.

Teorema (Dini)

Sea D *compacto y* $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones continuas sobre* D *que converge puntualmente a una función* f *continua en* D*. Si la sucesión* $\{f_n\}$ *es monótona en* D*, entonces* $\{f_n\}$ *converge uniformemente.*

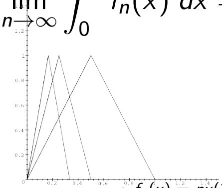
Teorema (Convergencia uniforme e integración)

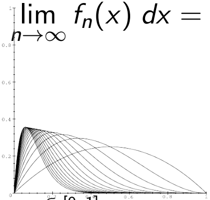
Sea $\{f_n(x)\}$ una sucesión de funciones Riemann integrables en $[a,b]$, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, que converge uniformemente a una función f. Entonces f es Riemann-integrable en $[a,b]$ y además

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] dx.$$

Observación. La convergencia uniforme no es condición necesaria.
Las dos sucesiones convergen puntualmente a 0, pero no uniformemente, y por el teorema de Arzelà,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx = 0.$$



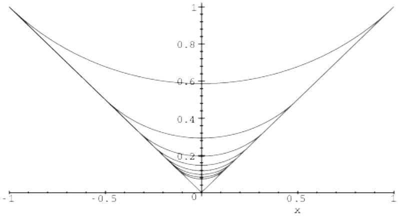


$f_n(x) = nx(1-x)^n$ con $x \in [0,1]$

Convergencia uniforme y derivación I

La convergencia uniforme de la sucesión no es suficiente, para afirmar algo sobre la sucesión derivada.

Puede ocurrir que una sucesión de funciones $\{f_n\}$ sea derivable para todo n, que converja uniformemente y que su límite no sea derivable



Convergencia uniforme y derivación II

Teorema (Convergencia uniforme y derivación)

Sea $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones derivables en* $[a, b]$ *tales que:*

1. *La sucesión* $\{f_n(c)\}$ *converge para algún* $c \in [a, b]$.
2. $\{f_n'\}$ *converge uniformemente en* $[a, b]$.

Entonces $\{f_n\}$ *converge uniformemente en* $[a, b]$ *a una función derivable* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *que verifica*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \ \ \forall x \in [a, b].$$

Series de funciones

Definición

Sea $D \subset \mathbb{R}$ y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones en D. Se considera la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k$. Llamaremos campo de convergencia de la serie al campo de convergencia A de la sucesión de suma parciales

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ es convergente en A, a la función $h : A \longrightarrow \mathbb{R}$, que llamaremos suma de la serie, dada por

$$h(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x), \quad \forall x \in A.$$

La serie de funciones converge uniformemente a h en A, si $S_n \to h$ uniformemente en A.

Prueba M de Weierstrass

Teorema

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en $D \subset \mathbb{R}$. Sea $\{M_n\}$ una sucesión de números reales positivos, tales que

$$|f_n(x)| \leq M_n \text{ para todo } x \in D,$$

tal que

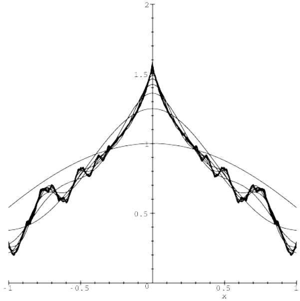
$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \text{ es convergente.}$$

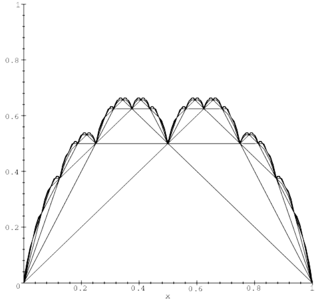
Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \text{ convergen uniformemente en } D.$$

Ejemplos

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k^2 x)}{k^2}, x \in \mathbb{R}.$
2. Sea $< x > \equiv$ distancia de x al entero más próximo. Consideramos la serie
$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{< 10^k x >}{10^k},$$





Series de potencias

Definición

Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$, llamaremos serie de potencias de centro x_0 y coeficientes a_n, a la expresión

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots$$

Si $x_0 = 0$, se tiene $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Llamaremos dominio de la serie de potencias a su campo de convergencia D.

Observación. Como $x_0 \in D$, se tiene que $D \neq \emptyset$.

La función suma de la serie de potencias $S : D \longrightarrow \mathbb{R}$ será

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n,$$

Fórmula de Cauchy-Hadamard

Proposición

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ *y sea* $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ *tal que existe* $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha$*. Entonces*

1. *Si* $\alpha = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ *converge absolutamente para todo* $x \in \mathbb{R}$*.*
2. *Si* $\alpha = \infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ *converge únicamente para* $x = x_0$*.*
3. *Si* $0 < \alpha < \infty$ *y* $r = \dfrac{1}{\alpha}$*, se tiene que la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$*:*
    1. *Converge absolutamente si* $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$*.*
    2. *No converge si* $x \notin [x_0 - r, x_0 + r]$*.*
    3. *No puede asegurarse nada si* $x = x_0 \pm r$*.*

Al valor $r = \dfrac{1}{\alpha}$ *se le denomina* **radio de convergencia de la serie de potencias.**

Convergencia uniforme de la serie de potencias

Proposición

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *una serie de potencias con radio de convergencia* r*.*
Entonces, las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ y } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$$

convergen uniformemente en $[-b, b]$*, para todo* $b < r$*.*

Corolario (Integración de una serie de potencias)

Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *una serie de potencias con radio de convergencia* $r > 0$. *Entonces, para todo* $x \in [0, r)$ *se cumple*

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x a_n t^n dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Corolario (Derivación de una serie de potencias)

Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *una serie de potencias con radio de convergencia* $r > 0$. *Entonces la serie derivada* $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ *tiene el mismo radio de convergencia y*

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad \forall x \in (-r, r)$$

Polinomio de Taylor

Definición (Polinomio de Taylor)

Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ intervalo abierto y sea f una función n veces derivable en $a \in A$. Llamaremos polinomio n-ésimo de Taylor asociado a la función f en a (cuando $a = 0$ se denomina polinomio de Maclaurin) a:

$$P_{n,a}f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Teorema (de Taylor)

Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ abierto, f derivable $n+1$ veces en A, y sea $a \in A$. Entonces se verifica que

$$f(x) = P_{n,a}f(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

donde c un punto del intervalo que une x con a.

Serie de Taylor

Teorema

Si el radio de convergencia de la serie de potencias $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, *es mayor que cero, entonces*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Observación. Toda serie de potencias con centro x_0 y $r > 0$ es la suma de su serie de Taylor en x_0, entendiendo por serie de Taylor en x_0 el desarrollo ilimitado del polinomio de Taylor en x_0.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r).$$

Desarrollos en serie de Taylor

Definición

Diremos que una función f puede desarrollarse en serie de potencias con centro en el punto x_0, si y solo si, existe $r > 0$ y existe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ de forma que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r).$$

Cuando f es desarrollable en serie alrededor de x_0, se dice que f es analítica en x_0.

Observación.

1. Si f es analítica en un punto x_0 entonces, f tiene derivadas de todos los órdenes en x_0 y se tiene que en un entorno de x_0
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$
2. Sea $R_{n,x_0}(x)$ es el resto n-ésimo del desarrollo de Taylor. Si f tiene derivadas de todos los órdenes en un entorno de x_0, se cumple
$$f \text{ es analítica en } x_0 \iff \lim_{n\to\infty} R_{n,x_0}(x) = 0, \ \ \forall x \in B(x_0, r),$$
3. Como $R_{n,x_0}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, resulta que si f tiene derivadas de todos los órdenes en $B(x_0, r)$ y las derivadase son uniformemente acotadas en $B(x_0, r)$, entonces f es analítica en x_0.